DISQUISITIONES DE CURVIS PEDALIBUS.

DISSERTATIO INAUGURALIS MATHEMATICA

QUAM

AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS

IN ACADEMIA FRIDERICIANA HALENSI CUM VITEBERGENSI

CONSOCIATA

CONSENSU ET AUCTORITATE

SUMMORUM IN PHILOSOPHIA HONORUM

RITE IMPETRANDORUM CAUSA

DIE XXVII. MENSIS IUNII A. MDCCCLXI.

UNA CUM THESIBUS

PUBLICE DEFENDET

AUCTOR

ADOLFUS SCHUMANN

BRANDEBURGENSIS.

ADVERSARIORUM PARTES SUSCIPIENT:

GUILELMUS WEITZEL, PHIL. DOCTOR.
FRIDERICUS HAHNEMANN, PRAEC. SUP.

HALIS SAXONUM

FORMIS PLOETZIANIS.

VIRO

CELEBERRIMO DOCTISSIMO

THEODORO SCHÖNEMANN

PROFESSORI IN GYMNASIO BRANDEBURGENSI

PRAECEPTORI CARISSIMO

HASCE

STUDIORUM PRIMITIAS

OFFERT

AUCTOR.

Curvarum pedalium (Fusspunktencurven) theorematibus quibusdam gravissimis, quae nexum inter poli situm et volumen curvae pedalis constituunt, a viro illustrissimo Steiner in disquisitione ingenii plena „von dem Krümmungs-Schwerpuncte ebener Curven" (Diarium Crellii, V. XXI.) pronuntiatis, et postea qualitatibus nonnullis hujus curvarum generis a Raabe celeberrimo (Diarium Crellii, V. XLVIII. V. L.) allatis, quaestio haud supervacanea mihi visa est: quibus qualitatibus curvae curvis pedalibus, quae aut mobili polo et fixa curva basali aut fixo polo et mobili curva basali gignuntur, involutae fruantur. Cum curvis pedalibus autem arcte cohaeret aliud curvarum genus, cujus contemplatio apte cum illarum quaestione conjungenda est; specto enim eas curvas, quarum curvae pedales ad polum quendam relatae certae quaedam curvae basales sunt Quarum curvarum, quae velut curvae pedales a poli situ et a curvae basalis forma dependent, proinde ac curvarum pedalium catervas (Schaar) dicto modo procreatas perscrutatus, eas, quas invenerim, res in hoc libello exponere utile fortasse esse existimo.

Sicuti locus punctorum, in quibus lineae, curvam datam tangentes, a lineis normaliter a puncto constante poloque nominato in tangentes illas demissis secantur, curva pedalis dicitur, ampliore sensu duarum curvarum curvam pedalem locum punctorum, ex quibus tangentes ad duas cujusvis natu-

rae curvas ductae rectum angulum faciunt, appellabo et hanc curvam, si curvae illam creantes C et K nominantur, (C, K) significabo. Qua ex ratione, curva C ad punctum P quoddam contracta, curva pedalis poli P et curvae K signo (P, K) gaudebit.

Curvas C et K (Fig. I.) cujusvis naturae sed continuae curvaturae esse positum sit. Jam quum duae minimae cordae aa_1 in curva C et $\alpha\alpha_1$ in curva K, quae rectum angulum, π signatum, includant, constructae sint, hic angulus paululum torqueatur ita, ut alterum crus anguli semper per a_1, alterum per α_1 proficiscatur. Quo facto π in angulum π_1 transierit atque crura hujus anguli curvam C et in puncto a_1 et in puncto a_2, curvam K et in puncto α_1 et in puncto α_2, secabunt; puncta autem a_1 et a_2 curvae C atque α_1 et α_2 curvae K proxima erunt, quoniam et curvae continuo curvatae sunt et angulus minimum tortus est. Jam quum puncta π et π_1 in circulo, cujus diametrus $a_1 \alpha_1$ est, posita sint et infinito progressu in hoc circulo commoveantur, si a et a_2 ad a_1 et α et α_2 ad α_1 in infinitum appropinquantur, puncta π et π_1 in infinitum collapsa duo puncta proxima sunt et curvae pedalis (C, K) et circuli, cujus diametrus est $a_1 \alpha_1$. Itaque si circulum per pnnctum quoddam π curvae pedalis (C, K) et per puncta a_1 et α_1, quae puncto π respondent, descripseris et in π ad circulum tangentem duxeris, haec linea curvam (C, K) quoque in puncto π tangit. Qua constructione tangentis facile concludes, curvam pedalem (C, K) toties curvam C tangere, quoties tangentes curvae K normaliter curvam C secant, et toties curvam K, quoties tangentes curvae C normaliter per K proficiscuntur. Deinde quum puncta a_1 et α_1 puncto π curvae pedalis correspondentia nominentur, de hoc quoque curvarum genere illud pronuntiari potest, quod Raabe celeberrimus analytica methodo de curva pedali puncti et curvae derivavit: ***normalis in puncto quovis π curvae pedalis per punctum, quod medium inter puncta correspondentia oblinet, proficiscitur.*** Restat, ut animadvertas, normales tres, in puncto quovis curvae pedalis et in punctis ei correspondentibus instructas, in unum punctum concurrere.

Punctis a et a_2 cum a_1 et punctis α et α_2 cum α_1 in infinitum collapsis, π_1 et punctum curvae pedalis (α_1, C) et punctum curvae pedalis (α_2, C), π et punctum curvae pedalis (α_1, C) et punctum curvae pedalis (α, C) esse haud ignorabis. Itaque totum complexum curvarum pedalium, quae curva C pro curva basali et punctis curvae K pro polis gignuntur, nobis intuentibus conspicuum est, unam quamque curvam hujus curvarum catervae, cujus polus sit ullum punctum α_1 curvae K, ab insequente curva, cujus polus α_2, et a praeeunte curva, cujus polus α sit, generaliter in singulis minime punctis π et π_1 secari, quae polis in infinitum commotis proxima sint. Ergo locus punctorum π est curva curvis illius catervae involuta, atque habes, quod pronuntiat: „*curva pedalis duarum curvarum C et K ad involutionem* (Enveloppe) *catervae curvarum pedalium, curva C pro curva basali et punctis curvae K pro polis procreatarum, pertinet.*" Sin autem in speciali curvae C et K sunt eaedem, evadit hoc theorema: „*Si rectus angulus ita movetur, ut crura ejus semper curvam C tangant, cacumen anguli curvam (C, C) describit, quae curva linea curvis pedalibus, curva C et punctis curvae C pro polis genitis, involuta putanda est.*"

Quum ex puncto quodam ad curvam tot tangentes, quota classe curva est, duci possint, polus punctum singulare curvae pedalis est, quumque a puncto ad curvam tot normales demitti possint, quota classe evoluta curvae gaudet, curva pedalis in tot punctis curvam basalem tangit, quota classe evoluta hujus curvae est. Quia igitur duae curvae pedales vicinae, quarum poli puncta vicina curvae K sunt, curvam basalem C generaliter in pluribus punctis tangunt, quorum tactionis punctorum binae proxime concidunt, si curvae pedales commoventur, praeter curvam pedalem (C, K) et curva C et curva K, locus polorum, ad involutionem catervae curvarum pedalium, quae curva basali C et punctis curvae K gignuntur, pertinent. Id autem semper in animo tenentes horum duorum ramorum involutionis rationem non habeamus et lineam curvis pedalibus (α, C), ubi α omnia puncta curvae K significat, involutam simpliciter eam partem

intelligamus, quam curvam (C, K) esse cognovimus. Quibus notatis procedamus.

Eadem meditatione, ac de K et C, de curva C et curva K facta sequitur, curvam (C, K) curvis pedalibus (a, K), ubi a omnia puncta curvae C percurrat, involvi. Itaque habes theorema: *„involutio curvarum pedalium, quae curva basali C et punctis curvae K pro polis gignuntur, atque involutio curvarum pedalium, quae curva basali K et punctis curvae C pro polis nascuntur, est eadem, eaque communis involutio harum duarum curvarum catervarum est curva pedalis curvae C et curvae K."*

Hoc ex theoremate per se sequitur illud speciale, quod Raabe celeberrimus analytice (Diarium Crellii, V. XLVIII.) de curvis pedalibus curvae et puncti derivavit. Jam ex prioribus contemplationibus deductum esset, sed hoc loco in conjunctione sua cum theoremate modo instituto quasi effluvium ejus dilucidius evadit. Curva enim pedalis puncti p ad polum quendam P relata locus est punctorum, in quibus rectae lineae per punctum p euntes a lineis normaliter ex P demissis secantur, itaque curva pedalis (P, p) est circulus, cujus diametrus est Pp. Jam quum curva K in punctum P contracta intelligatur, ex theoremate in hac speciali re emanat, curvam pedalem curvae basalis C et poli P eandem esse, atque lineam curvis pedalibus, quae puncto basali P et punctis curvae C pro polis creentur, involutam, id est, curvam pedalem curva quadam et polo genitam involutionem quoque esse circulorum, cujus diametri sunt radii ex polo ad curvam ducti.

Nunc autem adhibeamus, quae pronuntiata sunt, rebus specialibus quibusdam et iis quidem, ubi locum curvarum C et K duae sectiones conicae confocales obtinent, ac primum quidem quaeramus, qua natura sit curva pedalis duarum sectionum conicarum confocalium.

Perpendiculis (Fig. II.) e focis f et f_1 sectionis conicae in tangentes t et t_1, ex puncto o quodam ad eam deductas, demissis iisque supra tangentes suas ipsas longitudines us-

que ad F et F_1 extensis, facile cognoscis, tria latera trianguli $F\,o\,f_1$ relative aequa tribus lateribus trianguli $F_1\,o\,f$ esse, quare angulum, tangente t et linea of factum, aequum esse angulo, tangente t_1 et linea of_1 incluso, sine ullo negotio colligis. Quod quum constet perspicuum est, tangentes t et τ_1, e puncto o ad duas sectiones conicas confocales c et k ductas, et tangentes t_1 et τ, ab eodem puncto ad easdem tractas, eundem angulum includere. Jam quum o ita situm esse positum sit, ut angulus, quem t et τ faciunt, rectus fiat, t_1 et τ_1 quoque rectum angulum includunt. Deinde significemus angulum, quem τ et of_1 faciunt, ψ, angulum, quem t_1 et of_1 includunt, φ, tractum $of_1 = m$, tractum $of = n$. Quo facto perpendiculis e foco f in tangentes t et τ_1 deductis iisque suas ipsas longitudines usque ad F et F^1 auctis, angulum $f_1 o F^1 = R - \varphi + \psi$, angulum $f_1 o F = R - \varphi - (\psi - 2\varphi) = R - \psi + \varphi$ esse, ubi R rectum angulum signat, facile cognoscis. Quoniam $f_1 o F^1$ et $f_1 o F$ anguli supplementi sunt, tractus $fo = oF = oF^1 = n$, tractus $f_1 F = 2a$, $f_1 F^1 = 2\alpha$ est, ubi $2a$ et 2α magnae resp. reales axes sectionum conicarum sunt, Pythagoraico theoremate ad triangula $f_1 o F^1$ et $f_1 o F$ allato, hae exstant aequationes

$$m^2 + n^2 - 2mn \cos f_1 o F = (2a)^2$$
$$m^2 + n^2 + 2mn \cos f_1 o F = (2\alpha)^2$$

Itaque

$$m^2 + n^2 = 2a^2 + 2\alpha^2.$$

Distantia autem medii puncti sectionum conicarum a puncto $o = r$ et a foco $= e$ dicta, habemus aequationem

$$m^2 + n^2 = 2e^2 + 2r^2.$$

Itaque, hac aequatione cum illa conjuncta

$$r^2 = a^2 + \alpha^2 - e^2 = a^2 + \beta^2 = b^2 + \alpha^2,$$

ubi b et β parvas resp. imaginarias semiaxes sectionum conicarum c et k significant. Qua re primum colligimus, summam quadratorum magnae semiaxis sectionis conicae et parvae resp. imaginariae semiaxis sectionis conicae cum ea confocalis aequam esse summae quadratorum magnae semiaxis hujus et parvae resp. imaginariae illius sectionis conicae, deinde, curvam pedalem duarum sectionum conicarum con-

focalium circulum cum iis concentricum esse, cujus quadratum radii aequum sit summae quadratorum magnae semiaxis alterius sectionis conicae et parvae resp. imaginariae semiaxis alterius, postremo, si binas cum datis sectionibus conicis confocales sectiones conicas, quarum summa quadratorum magnarum semiaxium constantem valorem $a^2+\alpha^2$ habet, sectiones conicas confocales cum iis conjugatas appellamus, binas sectiones conicas cum ambabus sectionibus conicis illis confocales et conjugatas eadem curva pedali gaudere, eamque curvam pedalem communem circulum esse, qui circum medium systematis sectionum conicarum confocalium cum radio $\sqrt{a^2+a^2-e^2}$ circumdatus est. In systemate autem harum sectionum conicarum confocalium exstat una, cujus semiaxis magna $= e$ est, cujusque sectio conica conjugata igitur radium r magnam semiaxem habet, et par sectionum conicarum conjugutarum, quarum magnae semiaxes sunt eaedem. In illo casu sectio conica in rectam lineam degenerat et caterva tangentium eam involventium in fasciculos (Büschel) duos rectarum, quorum media foci sunt, reducitur, habesque notissimum illud, quod pronuntiat, curvam pedalem sectionis conicae ad focum relatae circulum concentricum, vertices magnarum semiaxium tangentem, esse, in altero illud, nec minus notum, quod dicit, cacumen recti anguli mobilis, cujus crura semper sectionem conicam tangunt, circulum concentricum, radium $\sqrt{2a^2-e^2}$ vel $\sqrt{a^2+b^2}$ habentem, describere. Si in speciali sectiones conicae c et k ellipses sunt, circulus ille pedalis (Fusspunktenkreis), quia $r = \sqrt{\alpha^2+b^2}$ $= \sqrt{a^2+\beta^2}$ itaque $r > a > \alpha$ est, ellipses circumcludit, si hyperbolae duae sunt genetrices circuli, circuli radius, quod b et β imaginariae sunt itaque $r < a < \alpha$ est, minor quam axes reales hyperbolarum est; si denique c ellipsis et k hyperbola, circulus, quia hyperbolam et ellipsim, confocales sese rectangule secare constet, quatuor puncta sectionis earum continet. Sin autem sectiones conicae c et k in parabolas duas degenerant, ad haec spectes. Distantiis enim foci f a verticibus magnarum axium sectionum conicarum c et k, fo-

co f proxime sitis, relative p et π nominatis iisque harum verticum a circulo (c, k), p_1 et π_1 signatis, has aequationes facile intelligis:

$$r = a + p_1; \text{ itaque } (a+p_1)^2 = a^2 + \alpha^2 - e^2.$$

Ergo

$$p_1^2 + 2p_1 a = (\alpha + e)(\alpha - e) = (\alpha + e)\pi.$$

Est autem

$$\alpha = a + \pi - p,$$
$$e = a - p,$$

Itaque

$$\alpha + e = 2a - 2p + \pi$$

et

$$p_1^2 + 2p_1 a = (2a + \pi - 2p)\pi,$$
$$2p_1 + \frac{p_1^2}{a} = \left(2 + \frac{\pi - 2p}{a}\right)\pi.$$

Jam vero si, ut a in infinitum crescat, facimus, sectiones conicae c et k in duas parabolas confocales extenduntur, circulus autem in rectam lineam, in axe normaliter locatam, transit, quae a foco communi parabolarum tractum $p_1 + p$ vel $p + \pi$ abest, quia, a infinite posito, in ultima aequatione $\frac{p_1^2}{a}$ et $\frac{\pi - 2p}{a}$ evanescunt et $p_1 = \pi$ resultat. Quibus rebus elucet, curvam pedalem duarum parabolarum confocalium rectam G, in communi axe parabolarum normalem, esse, quae a communi foco earum $p + \pi$, summam distantiarum foci a verticibus parabolarum absit, omniaque paria parabolarum cum iis confocalium quarum summa distantiarum foci communis a verticibus eundem valorem $p + \pi$ habeat, curva pedali frui eadem recta linea G. Est autem unum par parabolarum conjugatarum, quae sunt eaedem, rectam G ergo habent directricem, et unum par, quarum altera cum axe concidit, altera igitur recta G utitur linea verticis. Inde sequitur, curvam pedalem parabolae, ad eam relatam, directricem ejus esse, hinc, quia, quum parabola cum axe concidat, tangentes, quae eam involvunt, in fasciculum rectarum, cujns medium est focus, contrahuntur, curvam pedalem parabolae ad focum relatam lineam verticis ejus esse. — Quas ad res priusquam theorema supra demonstratum afferimus,

addamus pauca de natura curvae pedalis sectionis conicae ad polum quendam relatae.

Tot puncta curvae pedalis, sectione conica k et puncto quodam P procreatae, in linea recta G, alicubi sita, posita sunt, quot puncta in ea inveniuntur, ex quibus tangentes ad sectionem conicam ductae relative perpendiculariter stant in lineis, puncta ea cun polo P conjungentibus. Quod vero perpendicula in radiis, e polo P ad rectam G emissis, in ultimis eorum punctis instructa parabolam involvere et satis constat et vice versa e supra dictis sine ullo negotio colligi potest, tot puncta rectae G ad curvam pedalem illam pertinere manifestum est quot tangentes illi parabolae et sectioni conicae communes sint. Quae quum sint generaliter quatuor curva pedalis cum recta linea, alicubi sita, generaliter quatuor sectionis puncta habet, itaque est quarti ordinis. In ipso polo oritur punctum duplex, quoniam sectio conica est secundae classis. Atque etiam ut intelligamus, quot in punctis curva pedalis generaliter sectionem conicam tangat, circulum quendam polo P circumscriptum fingamus. Hic enim circulus sectionem conicam generaliter in quatuor punctis secat, et quia binae sequentes sectiones circuli et sectionis conicae collabi possunt, si radium circuli variabilem cogitamus, inter totum circulorum concentricorum complexum ad summum quatuor exstant, qui sectionem conicam tangunt. Itaque ex polo generaliter quatuor normales in sectionem conicam demitti possunt, quare curvam pedalem in quatuor summum punctis sectionem conicam tangere apertum est.

Quibus ex rebus, theoremate supra demonstrato adhibito, sequuntur:

„Si curvas pedales sectionis conicae ad puncta sectionis conicae cum ea confocalis pro polis relatas fingimus, catervam curvarum quarti ordinis adipiscimur, deinde si catervam curvarum pedalium hac sectione conica et punctis illius pro polis genitarum construimus, secundam catervam quarti ordinis curvarum nanciscimur, atque hae duae curvarum catervae communem habent involutionem, quae est circulus cum sectionibus conicis duabus concentricus, cujus

quadratum radii aequum est summae quadratorum magnae semiaxis alterius et parvae resp. imaginariae semiaxis alterius sectionis conicae. Ad hoc omnes duae curvarum pedalium catervae conjugatae, quae dicta ratione duabus sectionibus conicis confocalibus cum illis ambabus et conjugatis procreantur, eundem circulum habent involutionem communem. In speciali autem ad involutionem catervae curvarum quarti ordinis, quae pro curvis pedalibus sectione conica quadam et punctis ejusdem pro polis gignuntur, circulus cum ea concentricus referendus est, quem cacumen recti anguli, cujus crura sectionem conicam illam tangunt, describit. Adde, quod duae catervae curvarum quarti ordinis, quae duabus parabolis confocalibus pro curvis pedalibus hoc modo oriuntur, ut primum quidem alteram parabolam curvam basalem alteram polorum locum, hanc deinde curvam basalem illam locum polorum putemus, involutionem communem rectam lineam perpendiculariter in axi earum positam habent, quae a communi foco parabolarum summam distantiarum hujus foci a verticibus earum, $p + \pi$, *abest; atque etiam binae catervae curvarum pedalium conjugatae, quae dicto modo binis parabolis cum illis confocalibus et conjugatis nascuntur, eadem recta utuntur involutione communi. In speciali loco, ubi parabolae duae conjugatae fiunt eaedem, ambae curvarum catervae, quae iis respondent, sunt eaedem et involutio hujus curvarum catervae est directrix parabolae.“*

Sicuti curva et puncto quodam vel ampliore ratione curvis duabus ad curvarum genus, curvas pedales, ducimur, a curva etiam et a puncto, ut commemoravi, vel ampliore sensu a curvis duabus quibusdam profecti eam curvam quaerere possumus, cujus curva pedalis, ad alteram curvarum datarum relata, altera sit. Curvae enim V et F positae sint; quarum ad alteram V omnes tangentes duxerimus et in sectionibus earum cum altera F perpendicula in his tangentibus instruxerimus, haec perpendicula curvam quandam involvent, cujus curva pedalis, ad V relata, curva F est. Hanc vero curvam, quippe quae perpendiculis sit

creata, curvam perpendicularem curvarum V et F appellare et $[V, F]$ significare liceat; V autem nominetur curva polaris, F curva basalis. Qua ex ratione $[P, F]$, ubi P est punctum quoddam, est signum curvae, quae perpendiculis in extremis punctis radiorum e polo P in curvam F demissorum locatis involvitur.

Velut antea curvas C et K, sic curvas V et F cujusvis naturae sed continuae curvaturae esse positum sit. Jam quum circulum duobus punctis correspondentibus curvarum C et K et puncto π curvae pedalis (C, K), quod iis respondet, definitum curvam pedalem in puncto π tangere supra demonstratum sit, vice versa colligere possumus, circulum, qui per punctum a curvae V proficiscatur et in puncto b, puncto a correspondenti, curvam F tangat, perpendiculum, quod iis punctis respondet, in puncto tactionis ejus cum curva $[V, F]$ secare, qua re amplius concludimus, curvam F toties curva $[V, F]$ tangi, quot tangentes curvae V simul normales curvae F sint, ac toties in infinitum sese porrigere, quot tangentes curvae V et curvae F sint communes. — Atque etiam sine ullo negotio intelligis normales ternas N_1 N_2 N_3, in ternis punctis correspondentibus curvarum V, F, $[V, F]$ instructas in unum punctum, concurrere, quumque normales N_1 et N_3 rectum angulum includant, id punctum quoque punctum curvae pedalis evolutarum curvae V et curvae $[V, F]$ haberi posse. Quibus comprehensis haec resultant: „Si circulus variabili radio usus in curva F quadam hoc modo volvitur, ut curvam V in puncto quodam secet, in quo tangens posita per punctum tactionis circuli cum F proficiscatur, punctum ei diametraliter oppositum curvam $[V, F]$ describit, punctum vero puncto tactionis diametraliter contrarium curvam pedalem evolutarum curvae V et curvae $[V, F]$ gignit.“ Curva autem V ad polum P contracta sequitur: „Si circulus variabili radio usus ita fertur, ut curvam F semper tangat et per fixum punctum P proficiscatur, punctum fixo puncto diametraliter oppositum curvam perpendicularem $[P, F]$, punctum vero puncto tactionis diametraliter contra-

rium curvam pedalem evolutae curvae $[P, F]$ ad P relatam describit."

Haec ad specialem rem, ubi curva basalis F recta linea G et curva polaris V punctum quoddam P sit, adhibere atque nonnulla ex his concludere permissum sit. — Quum curvam $[P, G]$ parabolam, G lineam verticis et P focum habentem, esse satis constet, rebus quas supra demonstravimus allatis, haec pronuntiari possunt: „Si circulus cum variabili radio hoc modo in recta G volvitur, ut per fixum punctum P semper proficiscatur, punctum circuli fixo puncto diametraliter oppositum parabolam describit, cujus focus illud fixum punctum et cujus linea verticis recta G est, ac punctum puncto tactionis diametraliter contrarium curvam pedalem evolutae hujus parabolae ad focum relatam gignit." (Fig. III.) Quoniam medium punctum circuli mobilis variabilisque a polo P et a recta G idem abest, id quoque parabolam p describit, quae P utitur polo et recta G directrice. Qua in directrice perpendiculis instructis tractibusque eorum a punctis pedalibus (Fusspunkte) usque ad parabolam p ultra eam duplicatis, locus extremorum punctorum horum perpendiculorum, quia nullus alius est quam locus punctorum punctis tactionis circulorum cum recta illa diametraliter contrariorum, curva pedalis evolutae parabolae $[P, G]$, ad focum ejus relata, est. Jam fingamus perpendicula duo l et l_1 vicina in punctis n et n_1 vicinis rectae G collocata, quae parabolam p in μ et μ_1 secent, et cujus extrema puncta sint m et m_1 atque punctum s, ubi linea $\mu\mu_1$ rectae G occurrit, cum m conjungamus. Quo facto lineam ms, quia $n\mu : \mu m = n_1 \mu_1 : \mu_1 m_1$ est, per m_1 ire atque igitur, perpendiculis l et l_1 in infinitum commotis, tangentem, in μ ad parabolam p ductam, cum tangente, in m puncto μ correspondente ad istam curvam pedalem tracta, in punctum s rectae G concurrere cognoscimus. Id vero ac focum P punctum similitudinis parabolarum $[P, G]$ et p esse mente complexus, hanc constructionem medii puncti curvaturae parabolae probas: „In puncto quovis ν parabolae $[P, G]$ tangentem T et normalem N construas atque ex foco P perpendiculum in N demittas, cujus punctum

pedale m nominetur. Jam quum per medium μ tractus $P\nu$ lineam cum T parallelam duxeris, ejus et rectae G punctum sectionis s cum m conjunxeris, circulum, qui per P proficiscitur et lineam ms in puncto m tangit, descripseris, hic circulus in medio curvaturae puncto parabolae normalem N secat." Qua sit autem natura locus puncti m, facile cognosces. Etenim si distantias m ab axi parabolae $[P, G] = y$, et a recta G_1, cum G parallela et per P ducta, $= x$ significas, triangulum nPm esse rectangulum, y ejus altitudinem itaque mediam proportionalem inter segmenta hypotenusae, linea G_1 abscisa, esse respiciens, relationem $y^2 = kx$ adipisceris, ubi est k semiparameter parabolae $[P, G]$. Itaque curva pedalis evolutae parabolae $[P, G]$, ad focum ejus relata, iterum est parabola, cujus vertex in foco P et cujus focus in axi a vertice $\frac{k}{4}$ distans situs est. Cujus parabolae curva perpendicularis ad verticis punctum relata, quum evoluta parabolae $[P, G]$ sit, ut vice versa colligitur, constructionis curvarum perpendicularium memores alteram constructionem mediorum curvaturae punctorum parabolae $[P, G]$ efficere possumus; quam quippe per se perspicuam longius exponere omittamus. Sed alii notioni lector hoc loco indulgeat. Si ex curva quadam V, punctum P punctum similitudinis ratus, curvam V_1 cum V similem et duplicibus dimensionibus gaudentem genuisti ejusque curvam pedalem ad polum P pertinentem construxisti, ejus evolutam esse catacausticam curvae V et puncti P lucentis sine ullo negotio colligis. Quo intellecto catacausticam evolutae parabolae, cujus focus radios luminis emittat, evolutam quoque parabolae esse, cujus vertex in foco illius sita sit et cujus focus in axi illius positus dimidium semiparametri ejus absit, manifestum est.

Jam vero in contemplandis curvis perpendicularibus longius progrediamur. Si duas sequentes cordas parvas aa_1 et $a_1\ a_2$ in curva V finxerimus, quae prolongatae F in b et b_1 secant, atque in b et b_1 normales τ et τ_1 in iis instruxerimus, perpendicula τ et τ_1, punctis a et a_2 ad a_1 infinito progressu commotis, duae tangentes proximae sunt curvae $[V, F]$.

Verum etiam τ est tangens communis curvarum perpendicularium $[a, F]$ et $[a_1, F]$ ac τ_1 est tangens communis curvarum $[\alpha_1, F]$ et $[a_2, F]$; itaque unaquaeque curva $[a_1, F]$, si a_1 per omnia puncta curvae V fertur, cum proxime praecedente $[a, F]$ et cum proxime sequente $[a_2, F]$ singulas minimum tangentes communes habet, quae, si $[a, F]$ et $[a_2, F]$ in infinitum ad $[a_1, F]$ appropinquantur, in infinitum quoque collabuntur. Qua re quia, si membra curvarum catervae rectis lineis involuta cogitantur, linea curvis catervae involuta involutio tangentium binis curvis proximis communium putanda est, curva $[V, F]$ ad involutionem curvarum catervae $[a, F]$, ubi polus omnia puncta curvae V percurrit, referenda est, atque, quoniam $[[V, F], F] = V$ est, pertinet V ad lineam curvis perpendicularibus $[\alpha, F]$ involutam, si α per curvam $[V, F]$ fertur. Quoniam $[\alpha, F]$ curvam F in punctis tangit, per quae radii ex a normaliter in F emissi proficiscuntur, binae igitur vicinae curvae $[a, F]$ et $[a_1 F]$ in binis minimum punctis proximis c et c_1 curvam basalem F tangunt, F quoque ramus est involutionis curvarum $[a, F]$, si a per V fertur, eademque de causa pars involutionis quoque curvarum $[\alpha, F]$, ubi α per $[V, F]$ movetur. Sed hujus involutionis partis, quamquam nunquam ejus immemores, abhinc singularem rationem non habeamus et involutionem curvarum perpendicularium $[a, F]$, polo a in curva V mobili posito, simpliciter intelligamus eam partem, quam curvam $[V, F]$ novimus. Jam quum, quae demonstravimus, comprehendamus, hoc theorema pronuntiari potest:

„*Curvae perpendiculares, curva basali F et punctis curvae V pro polis genitae, curvam perpendicularem $[V, F]$ involvunt, et curvae perpendiculares, curva basali F et punctis curvae $[V, F]$ pro polis procreatae, involvunt curvam V.*“

In speciali casu omnes curvae $[\alpha, F]$, polo α in curva $[P, F]$ variabili, per unum punctum P proficiscuntur.

Hoc autem theorema ad specialia quaedam afferamus atque ideo quaecunque ex iis, quae supra de curva pedali duarum sectionum conicarum confocalium diximus, vice versa

sine ulla difficultate colliguntur, componamus. — Curva perpendicularis $[k, k_1]$ sectionis conicae k et circuli cum ea concentrici k_1 est sectio conica cum k confocalis, cujus magna semiaxis α habet valorem $\sqrt{r^2 - a^2 + e} = \sqrt{r^2 - b^2}$, ubi a et b semiaxes sunt sectionis conicae k et r est radius circuli k_1, atque, si circulus, qui cum sectione conica quadam cum k confocali concentricus est et cujus quadratum radii, deminutum quadratum magnae semiaxis ejus, valore $r^2 - a^2$ gaudet, cum sectione conica illa conjugatus nominatur, sectionis conicae cujusvis cum k confocalis curva perpendicularis, ad circulum conjugatum pro curva basali relata, eadem erit ac sectio conica $[k, k_1]$. In speciali si primum quidem k est ellipsis, si igitur $a > e$, ex formula $\alpha = \sqrt{r^2 - a^2 + e^2} = \sqrt{r^2 - b^2}$ colligis, curvam perpendicularem $[k, k_1]$, si $r > a$, si ergo circulus k_1 ellipsim circumcludat, ellipsim quoque esse, quae circulo circumcludatur, si $r < a$ et $> b$, si igitur k_1 ellipsim secat, $[k, k_1]$ esse hyperbolam, si denique $r < a$ et $< b$, ergo k_1 ellipsi circumcludatur, $[k, k_1]$ imaginariam esse, et re vera nulla realis curva perpendicularis in hoc casu exstat. Deinde si k est hyperbola, si igitúr $a < e$, facile percipis, curvam $[k, k_1]$, si $r > a$ itaque $\alpha > e$, ellipsim, si $r < a$, α agitur $< e$, hyperbolam esse. Si $a = e$ fit, sectio conica k igitur in rectam degenerat, caterva tangentium eam involventium ad fasciculos duo rectarum, quorum media puncta [P et P_1 a medio circuli idem absunt, reducitur, itaque curva perpendicularis $[P, k_1]$ et $[P_1, k_1]$ est eadem sectio conica, quae P et P_1 focos habet, et cum verticibus magnarum resp. realium axium circulum k_1 tangit, et haec sectio conica $P, k_1]$ quidem est ellipsis, si P intra circulum, hyperbola, si extra eum situm est. Si denique sectio conica k in parabolam extenditur circulus ille concentricus k_1 in rectam G in axi parabolae normalem mutatur, et sectio conica $[k, G]$ est hoc loco parabola cum k confocalis, cujus vertex a foco cummuni tractum $g - p$ abest, ubi p distantiam verticis parabolae k a foco ejus et g distantiam hujus foci a recta G significat; atque etiam omnes parabolae $[k^1, G^1]$, ubi k^1 cum k confocalis, G^1 cum G parallela ita cohaerent, ut $g^1 - p^1$

idem ac $g - p$ sit, sunt eaedem atque $[k, G]$. Si $g^1 = 2p^1$, G^1 igitur directrix parabolae k^1 est, $[k^1, G^1] = k^1$ sequitur et ex hypothesi $p^1 = o$, $[P, G^1]$ parabolam esse emanat.

Jam vero his rebus theoremate, quod supra explicavimus, adhibito sequuntur:

Sectiones conicae $[P, k_1]$, quae polo P in sectione conica quadam k, cum circulo k_1 concentrica, mobili creantur, sectionem conicam $[k, k_1]$ cum k confocalem involvunt, cujus magna semiaxis valore $\sqrt{r^2 - b^2}$ fruitur, si r radius est circuli k_1 et b parva resp. imaginaria semiaxis sectionis conicae k. Habet vero $[k\, k_1]$ ad k quodammodo rationem reciprocam, i. e., sectiones conicae $[\pi, k_1]$, polo π in $[k, k_1]$ variabili, sectionem conicam k involvunt. Atque etiam omnes catervae sectionum conicarum, quae dicto modo punctis sectionis conicae cujusvis k^1 cum k confocalis et circulo k^1_1 ei conjugato oriuntur, linea involuta communi $[k, k_1]$ utuntur. Si magna semiaxis sectionis conicae k aequa est radio circuli k_1 omnes sectiones conicae $[P, k_1]$ in foeis ejus sese secant, et si $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, caterva sectionum conicarum k ipsam involvit.“

Quoniam singulae sectiones conicae catervae $[P, k_1]$ cum k et $[k, k_1]$ concentricae sunt, radium circuli k_1 habent magnam semiaxem, earumque foci in extremis punctis diametrorum sectionis conicae k siti sunt, rerum modo dictarum memores vice versa haec quoque pronuntiare possumus: „*Foci catervae sectionum conicarum, quae sectionem conicam quandam, quacum sunt concentricae, involvunt, omnesque aequa magna axe utuntur, iterum in sectione conica siti sunt, quae cum illa confocalis est, ac foci sectionum conicarum, quae cum hac concentricae sunt, hanc involvunt, eademque magna axe, qua sectiones conicae illius catervae, gaudent, in illa sunt positi.*“ Si quantitas magnae axis membrorum talis catervae, quae hac ratione sectioni conicae quasi adscripta est, variabilis intelligitur, ad sectionem conicam totus complexus catervarum (Schaar Schaar) sectionum conicarum, quae cum ea concentricae sunt eamque involvunt, pertinet, ac fo-

ci omnium sectionum conicarum huc pertinentium in systemate sectionum conicarum cum illa confocalium, ita ut cuivis certae catervae una ex systemate obveniat, siti sunt. Vice igitur versa singulis sectionibus conicis ex systemate sectionum conicarum confocalium certae quaedam catervae dicta ratione quasi adscribi possunt, quae sunt ejusmodi, ut foci omnium membrorum earum in una sectione conica systematis positi sint. „*Si in speciali quadratum magnae resp. realis semiaxis sectionum conicarum talis catervae, aequum est summae quadratorum semiaxium ejus sectionis conicae, quacum sunt concentricae eamque involvunt, locus focorum earum est ea ipsa sectio conica; sectiones conicae denique, quae communi diametro et aequa magna axe gaudent, focos habent iterum in sectione conica, cujus foci sunt extrema puncta illius diametri et cujus magna axis eadem atque illa catervae est.*“

Quod vero parabolas attinet, haec habemus pronuntiata:

„*Caterva parabolarum [P, G], polo P in parabola Q, cujus axis normalis in G est, variabili, parabolam [Q, G] cum Q confocalem involvunt, cujus vertex a foco communi tractum g—p abest, ubi p distantiam foci a vertice parabolae Q et g ejus distantiam a recta G significat; habet vero [Q, G] ad Q reciprocam quandam rationem, i. e., parabolae [π, G] polo π in [Q, G] variabili, involvunt parabolam Q. Exstat porro ad unam quamque parabolam Q*^{1}*, cum Q confocalem, certa quaedam caterva parabolarum [P*^{1}*, G*^{1}*], ubi P*^{1} *omnia puncta parabolae Q*^{1} *et G*^{1} *certam quandam rectam cum G parallelam significat, cujus involutio sit parabola [Q, G]. Si G directrix est parabolae Q, parabolae [P G] Q ipsam involvunt, ac si G est linea verticis parabolae Q, omnes parabolae [P, G] per focum parabolae Q proficiscuntur.*“

Vice autem versa haec colliguntur:

„*Caterva parabolarum, quae rectam quandam G habent communem lineam verticis et parabolam Q, cujus axis in G est normalis, tangunt, focos habent iterum in parabola,*

quae cum Q confocalis est, ac foci catervae parabolarum quae hanc parabolam tangunt eademque recta G utuntur communi linea verticis, in illa sunt positi. Est autem caterva catervae (Schaar Schaar) parabolarum, quae unam quamque parabolam Q' ex caterva parabolarum cum Q confocalium tangunt et rectam G' cum Q' uno quoque loco conjugatam (recta G' cum Q' relative ad G et Q conjugata dicitur, si $g - p = g' - p'$ est, ubi g, p, g', p' idem quod antea significant) communem lineam verticis habent, ejusmodi, ut foci omnium parabolarum, quae illa caterva catervae continentur, in unica parabola cum Q confocali siti sint. *In speciali foci omnium parabolarum, quae punctum P habent commune et communi linea verticis gaudent, iterum in parabola positi sunt, quae P foco et G linea verticis utitur; foci denique omnium parabolarum, quae parabolam tangunt, ejusque directricem habent communem lineam verticis, in hac ipsa parabola siti sunt.* —

Adhuc catervas tantum curvarum pedalium et perpendicularium, quae fixa curva basali et mobili polo creantur, contemplatus necessarium supplementum existimo quaestionem catervarum curvarum pedalium et perpendicularium, quae mobili variabilique curva basali, i. e. curvarum caterva quadam et fixo polo gignuntur.

Data sit caterva quaedam curvarum cujusvis generis sed continuae curvaturae, et punctum quoddam fixum P. Quodsi singulas curvas catervae tangentibus involutas putamus, lineam communibus tangentibus binarum curvarum proximarum involutam involutionem curvarum catervae esse perspicuum est. Jam C, C_1, C_2, sint tres curvae vicinae catervae, t tangens communis curvarum C et C_1, t_1 tangens communis curvarum C_1 et C_2, quae, si C, C_1, C_2 in infinitum commoventur, infinito quoque progressu collabuntur, perpendiculorum denique in t et t_1 ex P demissorum puncta pedalia nominentur π et π_1. Quae quum posita sint, facile cognoscis, π et punctum curvae pedalis (P, C) et curvae pedalis (P, C_1) atque π_1 punctum et curvae (P, C_1) et curvae (P, C_2) esse. Itaque totum complexum curvarum peda-

lium, curvis C catervae et fixo puncto P genitarum, mente amplexus, unamquamque curvam pedalem (P, C_1) a proxime praeeunte (P, C) et a proxime sequente (P, C_2) generaliter in singulis minimum punctis secari, quae, quum C et C_2 infinite ad C_1 appropinquentur, infinito quoque progressu coeant, intelligis. Quoniam igitur locus punctorum π et involutio curvarum pedalium (P, C), curva basali C unam quamque curvam catervae propositae significante, et curva pedalis involutionis curvarum C est, hoc habemus theorema:

„*Curva pedalis involutionis curvarum catervae est eadem atque involutio curvarum pedalium curvarum hujus catervae.*"

Si in speciali ad catervam rectarum spectas, facile identitatem intelligis, quam id theorema pronuntiat, ac si ad catervam punctorum theorema affers, iterum probatur illud Raabi celeberrimi supra commemoratum.

Jam vero specialibus quibusdam rebus id theorema, ut vim ejus probemus, adhibeamus atque consequentias paucas deducamus. Curvas pedales catervae sectionum conicarum, quae foco P gaudeant communi et duas rectas G et G_1 tangant, ad hunc communem focum P relatas catervam circulorum esse, qui per puncta pedalia p et p_1 perpendiculorum ex P ad G et G_1 demissorum proficiscantur, sine ullo negotio ex theoremate colligis. Jam quum circulus quicunque hujus catervae sit curva pedalis certae cujusdam sectionis conicae illius catervae, ergo cum uno quoque circulo hujus catervae certa quaedam sectio conica illius concentrica sit, locus mediorum circulorum est idem ac locus mediorum sectionum conicarum itaque: „*media puncta omnium sectionum conicarum, quae foco communi* P *gaudent atque duas rectas* G *et* G_1 *tangunt, in recta quadam linea* **L** *sita sunt, quae in medio tractus* pp_1 *normaliter in* pp_1 *instructa est, ubi* p *et* p_1 *puncta pedalia perpendiculorum ex* P *ad* G *et* G_1 *deductorum significant.*" Inter omnes sectiones conicas una tantum parabola exstare potest, quoniam unum tantum medium punctum in infinito positum est, eaque parabola foco utitur P et linea verticis recta pp_1, quare facile efficere

potes constructionem parabolae, cujus focus et duae tangentes data sunt. Nec difficilius ex rebus commodum expositis colligis constructionem sectionis conicae, quae tres rectas alicubi sitas tangit et dato foco gaudet; ejus enim medium punctum est medium circuli, qui triangulo pedali (Fusspunkten Dreieck) trium datarum rectarum ad focum relato circumscriptus est. — Deduci porro ex theoremate potest, curvas pedales catervae sectionum conicarum, quae focum P et punctum quoddam π habeant commune et rectam quandam G tangant, ad focum communem relatas, catervam circulorum esse, qui per p, punctum pedale perpendiculi ex P in G demissi, proficiscantur et circulum (P, π) tangant. Quoniam uni cuique circulo hujus catervae sectio conica illius catervae et ea quidem concentrica correspondet, locus mediorum punctorum catervae sectionum conicarum est idem ac locus mediorum catervae circulorum. Jam quum locum mediorum punctorum circulorum, qui per punctum p proficiscantur et circulum (P, π) tangant, sectionem conicam esse, cujus foci sint p et medium punctum circuli (P, π) et cujus magna resp. realis axis sit radius circuli $(P\, \pi)$, satis constet, „***media puncta omnium sectionum conicarum, quae foco P et puncto quodam π utuntur communi ac praeterea rectam G tangunt, iterum in sectione conica k posita sunt, cujus foci punctum pedale p perpendiculi ex P in G demissi et medium punctum circuli (P, π) et cujus magna resp. realis axis aequa est radio circuli (P, π).***“ Si p intra circulum (P, π) situm est, k est ellipsis, si extra cum, hyperbola; illic igitur inter membra catervae exstat nulla parabola, hic duae, quia hyperbola duo puncta in infinito habet. Quarum parabolarum lineae verticis sunt tangentes, ex p ad (P, π) ductae, quare constructio parabolae, quae focum et punctum quoddam commune habet ac rectam lineam tangit, perspicua est Nec minus elucet constructio sectionis conicae, cujus focus, duo puncta, tangens quaedam data sunt, et constructio ejus, quae foco, puncto quodam, duabus tangentibus definita est. Haec sine ulla difficultate ad constructionem circuli reducitur, qui per duo puncta profectus circulum tangit, illa

ad constructionem circuli, qui per unum punctum profectus duos circulos tangit. — Postremo theorema etiam ad catervam sectionum conicarum afferamus, quae focum $\boldsymbol{P}$ et duo puncta π et π_1 habent communia. Quarum sectionum conicarum curvae pedales ad $\boldsymbol{P}$ relatae sunt caterva circulorum, qui ambos circulos $(\boldsymbol{P}, \pi_1)$ et $(\boldsymbol{P}, \pi_1)$ tangunt. Jam quum media puncta hujus circulorum catervae in duabus sectionibus conicis confocalibus, quarum foci media puncta m et m_1 circulorum $(\boldsymbol{P}, \pi)$ et $(\boldsymbol{P}, \pi_1)$ earumque magnae axes $r+r_1$ et $r-r_1$ sint, ubi r et r_1 radii circulorum $(\boldsymbol{P}, \pi)$ et $(\boldsymbol{P}, \pi_1)$ significant, sita esse notum sit, eadem de causa atque antea „*media puncta omnium sectionum conicarum, quibus focus* $\boldsymbol{P}$ *et duo puncta* π *et* π_1 *communia sunt, in duabus sectionibus conicis confocalibus posita sunt, quarum foci sunt media puncta* m *et* m_1 *circulorum* $(\boldsymbol{P}, \pi)$ *et* $(\boldsymbol{P}, \pi_1)$ *earumque magnae axes gaudent valoribus* $r+r_1$ *et* $r-r_1$*, ubi* r *et* r_1 *sunt radii circulorum* $(\boldsymbol{P}, \pi)$ *et* $(\boldsymbol{P}, \pi_1)$.“ Quoniam (P, π) et $(\boldsymbol{P}, \pi_1)$ sese secant, ergo $r+r_1$ majus est quam mm_1 et $r-r_1$ minus quam mm_1, altera sectio conica mediorum punctorum (Mittelpunktskegelschnitt) est ellipsis altera hyperbola. Itaque inter membra catervae sectionum conicarum propositae duae tantum inveniuntur parabolae quarum lineae verticis sunt duae illae tangentes circulis $(\boldsymbol{P}, \pi)$ et $(\boldsymbol{P}, \pi_1)$ communes, quare constructio parabolae. foco et punctis duobus definitae, apparet. Atque etiam constructionem sectionis conicae, cujus focus $\boldsymbol{P}$ et tria puncta π, π_1, π_2 data sint, ad constructionem circuli, qui circulos $(\boldsymbol{P}, \pi)$, $(\boldsymbol{P}, \pi_1)$, $\boldsymbol{P}, \pi_2)$ tangat, reduci itaque facile effici posse, sine ullo negotio perspicis. Multa alia etiam ex theoremate deduci possunt, sed haec ad vim ejus probandam hoc loco sufficiant. —

Vice versa ex theoremate commodum demonstrato sine ullo negotio analogum theorema curvarum perpendicularium colligi potest, quod pronuntiat:

„*Curva perpendicularis involutionis curvarum catervae, ad polum quendam relata, atque involutio curvarum*

perpendicularium hujus curvarum catervae ad eundem polum pertinens est eadem."

In speciali caterva rectarum G data sit, quae curvam F cujusvis naturae involvunt. Quarum rectarum curvae perpendiculares ad polum aliquem pertinentes, sunt parabolae $[P, G]$, quae polo utuntur foco communi earumque verticis puncta sunt puncta pedalia perpendiculorum ex P in G deductorum. Quumque igitur locus horum punctorum verticis curva pedalis (P, F) sit et parabolas curvam perpendicularem $[P, F]$ involvere ex theoremate concludatur, hoc pronuntiari potest: *Caterva parabolarum, quae focum P communem habent, et cujus verticis puncta in curva quadam C sita sunt, involutione utuntur curva K, quae cum C hoc modo cohaeret, ut curva pedalis curvae pedalis curvae K ad P pertinens sit curva C.*" Quum curvam pedalem parabolae ad verticis punctum relatam cissoidam esse notum et curvam perpendicularem ejus ad idem punctum pertinentem evolutam certae cujusdam parabolae esse supra demonstratum sit, parabolae, quarum focus est punctum recessus (Rückkehrpunkt) cissoidae et quarum puncta verticis in cissoida posita sunt, evolutam certae cujusdam parabolae involvunt.

Atque etiam ad alias res theorema, ut vis ejus appareat, afferamus. Circulorum caterva posita sit, qui duas rectas G et G_1 tangunt. Jam quum curva perpendicularis circuli et puncti P sectio conica cum circulo concentrica sit, cujus focus est polus P, theoremate adhibito, curvas perpendiculares circulorum catervae propositae catervam sectionum conicarum esse, quae foco P gaudeant communi et parabolas $[P, G]$ et $[P, G_1]$ tangant, apertum est. Quod vero ad unumquemque circulum illius catervae sectio conica cum eo concentrica pertinet, locus igitur mediorum punctorum circulorum est idem atque locus mediorum punctorum sectionum conicarum, elucet hoc pronuntiatum: „*Media puncta sectionum conicarum, quae communem focum P habent et duas parabolas, quibus idem focus P est, tangunt, in duabus rectis lineis normaliter invicem locatis, sita sunt, quae sunt lineae bipartientes angulum, quem ambae lineae verticis parabolarum inclu-*

dunt." — Deduci porro ex theoremate potest, catervam circulorum, qui circulos duos k et k_1 tangant, curvas perpendiculares ad $\boldsymbol{P}$ relatas habere catervam sectionum conicarum, quae $\boldsymbol{P}$ foco communi utantur, atque sectiones conicas $[\boldsymbol{P}, k]$ et $[\boldsymbol{P}, k_1]$ tangant. Quoniam eadem de causa atque antea locus mediorum punctorum illorum circulorum idem est ac locus mediorum punctorum catervae sectionum conicarum, locus vero illorum duae sectiones conicae confocales est, quae focos habent media puncta circulorum k et k_1, „*media puncta sectionum conicarum, quibus* $\boldsymbol{P}$ *communis focus est, et quae duas sectiones conicas* $\boldsymbol{c}$ *et* c_1, *eodem foco gaudentes tangunt, in duabus sectionibus conicis confocalibus* f *et* f_1 *sita sunt, quarum foci sunt media puncta* m *et* m_1, *sectionum conicarum* c *et* c_1, *et quarum magnae resp. reales axes sunt* $a + a_1$, *et* $a - a_1$, *si* a *et* a_1, *magnae resp. reales semiaxes sectionum conicarum* c *et* c_1 *significant.*" Si circuli, qui magnas axes sectionum conicarum c et c_1 diametros habent, sese secant, altera sectionum conicarum f et f_1 est ellipsis, altera hyperbola, si alter circulus intra alterum situs est, f et f_1 sunt ellipsis, si extra, ambae sunt hyperbolae. Itaque prout c et c_1 invicem positae sunt, inter membra illius sectionum conicarum catervae aut nulla parabola aut duae, aut quatuor inveniuntur. Quarum lineae verticis sunt tangentes communes circulorum, qui magnas axes sectionum conicarum c et c_1 diametros habent; ergo facile efficies constructionem parabolae, cujus focus datus est et quae duas sectiones conicas c et c_1, eodem foco gaudentes, tangit. Nec vero difficilius ex modo dictis sectio conica construi potest, quae punctum quoddam $\boldsymbol{P}$ focum habet et tres sectiones conicas c_1, c_2, c_3, eodem foco $\boldsymbol{P}$ gaudentes, tangit. Re vera enim si tres circulos k_1, k_2, k_3 descripsisti, qui relative magnas axes sectionum conicarum c_1, c_2, c_3 diametros habent, sectionem conicam $\boldsymbol{X}$ quaesitam curvam perpendicularem esse circuli, qui k_1, k_2, k_3 tangat, ad $\boldsymbol{P}$ relatam, sine ullo negotio perspicis. Cujus circuli medium est medium quoque punctum sectionis conicae $\boldsymbol{X}$. Quod denique constructionem punctorum tactionis sectionis conicae $\boldsymbol{X}$ cum c_1, c_2, c_3 atti-

net, hoc modo eam efficies. Duces enim ex $\boldsymbol{P}$ ad tria puncta tactionis σ_1, σ_2, σ_3 circuli, k_1, k_2, k_3 tangentis, tres radios s_1, s_2, s_3 et in σ_1, σ_2, σ_3 tres rectas g_1, g_2, g_3, relative in s_1, s_2, s_3 normales, instrues. Jam quum circulos f_1, f_2, f_3, qui per $\boldsymbol{P}$ proficiscuntur et relative in σ_1, σ_2, σ_3 circulos k_1, k_2, k_3 tangunt, descripseris, tria relativa sectionis puncta horum trium circulorum f_1, f_2, f_3 cum g_1, g_2, g_3 sunt tria quaesita tactionis puncta. —

Extremum sit, ut theoremata commodum deducta ad generaliores curvas pedales et perpendiculares extendam, in quibus locum poli curva quaedam polaris obtinet. Propositae sint curva $\boldsymbol{K}$ et caterva curvarum $\boldsymbol{C}$, quae quavis natura sed continua curvatura gaudeant. Quodsi, tribus proximis curvis $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$ e caterva electis, ad $\boldsymbol{C}_1$ et $\boldsymbol{C}$ tangens communis t et ad $\boldsymbol{C}_1$ et $\boldsymbol{C}_2$ tangens communis t_1 ducta est, quae ambae in infinitum commoventur, si $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$ in infinitum coeunt, t et t_1 tangentes proxime sequentes curvae sunt, quae curvis $\boldsymbol{C}$ involvitur. Jam duabus tangentibus τ et τ_1 ad $\boldsymbol{K}$, quae relative normaliter in t et t_1 locatae eas in π et π_1 secant, ductis π punctum sectionis ambarum curvarum ($\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{C}$) et ($\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{C}_1$) ac π_1 punctum sectionis curvarum ($\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{C}_1$) et ($\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{C}_2$) est. Itaque omnis curva ($\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{C}_1$) a proxime praeeunte ($\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{C}$) et a proxime sequente ($\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{C}_2$) in singulis minimum punctis π et π_1 secatur, quae in infinitum appropinquantur, si ($\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{C}$) et ($\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{C}_2$) ad ($\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{C}_1$) admoventur. Ergo locus punctorum π est involutio curvarum pedalium ($\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{C}$). Verum etiam locus punctorum π est curva pedalis ($\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{E}$), si $\boldsymbol{E}$ curva curvis $\boldsymbol{C}$ involuta significat. Quare „*curva pedalis involutionis curvarum catervae, ad curvam polarem quandam relata, est eadem atque involutio curvarum pedalium hujus catervae, ad eandem curvam polarem relatarum.*“

Vice autem versa sequitur theorema: „*curva perpendicularis involutionis curvarum catervae, ad curvam polarem quandam pertinens, atque involutio curvarum perpendicularium hujus catervae, ad eandem curvam polarem relatarum, est eadem.*“

Si igitur curva basali C fixa polus P in curva K movetur, caterva curvarum pedalium nascitur, quarum involutio est (K, C), si deinde curvae basalis C quoque situs et forma ex ulla quadam lege variatur, exstat totus complexus talium catervarum et simplex caterva involutionum (K, C). Harum autem involutionum involutio est curva (K, E), si E involutio curvarum dicitur, in quas curva basalis C pedetentim mutatur. Eadem valent ad curvas perpendiculares. Atqui curvarum pedalium et perpendicularium catervis, quae variabili polo ac variabili curva basali procreantur, consideratis, finita sit disquisitio. —

VITA.

Adolfus Schumann Brandeburgi ad/H. die XXV. mensis Junii anno MDCCCXXXVIII. natus sum, patre Adolfo, rectore superioris scholae puellis conditae, matre vero Ottilia e gente Lange, quibus vivis adhuc laetor. Fidem autem evangelicam profiteor.

Primis litteris imbutus in gymnasium, quod floret Brandeburgi viro Ill. Braut directore, receptus sum, quam scholam undecim fere annos usque ad mensem Martis MDCCCLVIII. frequentavi. Tum vero maturitatis testimonio instructus civibus academicis universitatis Halae-Vitebergensis a rectore Ill. Moll adscriptus sum, ibique per tria semestria scholis interfui; mathematicis quidem viri Ill. Heine et Cel. Neumann, physicis Ill. Knoblauch, philosophicis Cel. Haym. Deinde Berolinum profectus in numero civium academicorum universitatis Fridericae Guilelmae Berolinensis a rectore Ill. Bökh receptus sum ibique scholis interfui mathematicis virorum Ill. Kummer, Weierstrass, Steiner, Borchardt, Cel. Christoffel, philosophicis vero viri Ill. Trendelenburg. Omnibus autem viris, quorum scholis interfui, optime de me meritis, gratias semper quam maximas agam, eodemque modo praeceptori carissimo Cel. Schönemann, consilio benevolentissimo tironem saepe adjuvanti. —

THESES.

I.

Methodus mere geometrica in disquirendis spatii formis analyticae est anteponenda.

II.

Sensualis intuitio ad abstractam analysin excolendam permultum valuit.

III.

Pressio, quae fit in aquae radio, non est atmosphaerica in eo loco, quo radius exit ex ore vasis cujusdam.

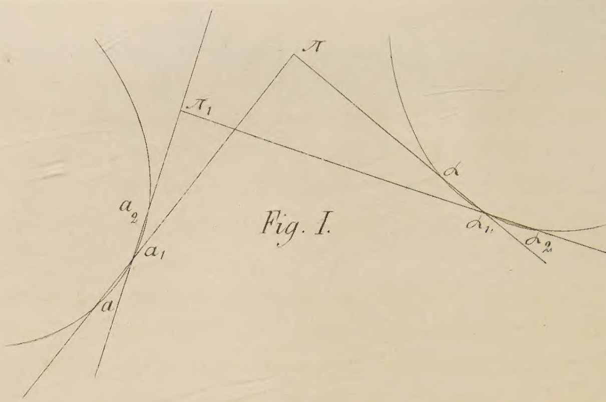


Fig. I.

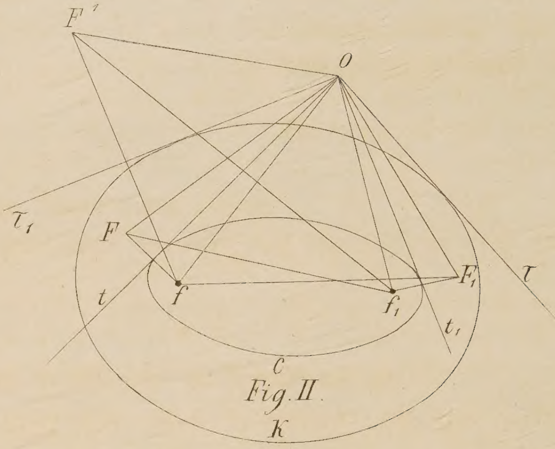


Fig. II.

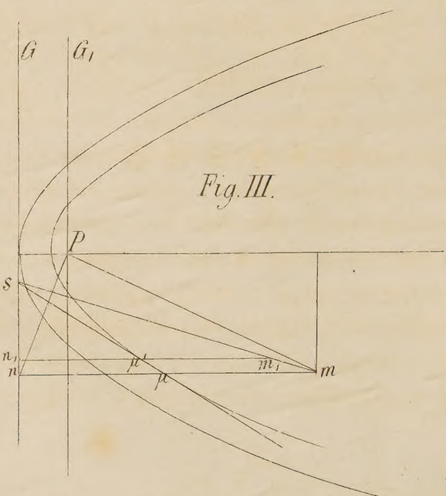


Fig. III.